université PARIS DIDEROT PARIS 7

L3 MIASHS - OPTIMISATION - 2018-2019

TD2 : FONCTIONS CONVEXES ET COERCIVITÉ

Exercice 1. *(Convexité et coercivité.)* Dire à propos des fonctions suivantes si elles sont convexes? coercives? α-convexes ?

(1) $f(x) = (1-x^2)^2$.
(2) $f(x,y) = x^3 + 2y^2$.
(3) $f(x,y) = (x-y)^2$.
(4) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
(5) $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + g(x)$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et deux fois différentiable.

Exercice 2. *(Existence de minimiseurs.)*
Les fonctions suivantes atteignent-elles leur minimum ?

(1) $f(x) = \exp(-x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
(2) $f(x) = \cos(\exp(x^2))$ sur $[0,1]$.
(3) $f(x) = -\|x\|^2$ sur la boule fermée $\mathbb{B}(0,1)$.
(4) $f(x,y) = x^6\cos y + 2y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. *(Opérations sur les fonctions convexes.)*

(1) Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Soient A une matrice dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Étudier la convexité des fonctions
$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad x \mapsto g(Ax+b)$$
(2) On suppose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. Montrer que $g \circ f$ n'est pas convexe en général. Montrer que si on suppose de plus que g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
(3) Soient $a \in]0,+\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$. Étudier la convexité des fonctions suivantes: $x \mapsto e^{bx}$ (sur $\mathbb{R}$), $x \mapsto x^a$ (sur $\mathbb{R}^+$), et $x \mapsto \|x\|^a$ (sur $\mathbb{R}^n$).

Exercice 4. *(Stricte convexité.)* On considère les trois fonctions suivantes :
$$f(t) = t^4 \quad \text{définie sur } \mathbb{R}, \quad g(x,y) = y^4 \text{ et } h(x,y) = (x^2+y^2)^2 \quad \text{définies sur } \mathbb{R}^2.$$
(1) Montrer que ces trois fonctions sont convexes mais pas α-convexes.
(2) Déterminer lesquelles d'entre elles sont strictement convexes.

Exercice 5. *(Ensembles de sous-niveau.)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau
$$S_f(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \leqslant r\}$$
est convexe.

Exercice 6. *(Minimum local d'une fonction convexe.)*
Soit K un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe sur K que l'on ne suppose pas nécessairement être différentiable. Montrer que tout minimum local de f sur K est un minimum global de f sur K.

Exercice 7. *(Somme de Minkowski.)*
Soit E et F deux ensembles de $\mathbb{R}^n$. On définit leur somme de Minkowski par

$$E \oplus F = \{x + y \ : \ x \in E, \ y \in F\}.$$

Montrer que si E et F sont convexes alors $E \oplus F$ est convexe.

Exercice 8. *(Une famille de fonctions d'utilité concaves.)*
Pour tout $\alpha \in [0, 1[$, on définit la fonction $u_\alpha : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de la façon suivante:

$$(\forall x \geqslant 0) \quad u_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} & \text{if } \alpha > 0, \\ \ln(x) & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, $u_0(x) = \lim_{\alpha \to 0} u_\alpha(x)$.
(2) Montrer que pour $\alpha \in]0, 1[$ fixé, u_α est concave, croissante et vérifie $u_\alpha(1) = 0$.
(3) En économie, on appelle *utilité* une mesure de la satisfaction produite par la consommation ou l'obtention d'un bien ou d'un service. Supposons que la valeur $u_\alpha(x)$ modélise l'utilité associée à une quantité $x > 0$ d'un certain produit. On appelle alors *utilité marginale* la dérivée $u'_\alpha(x)$.
Montrer que l'utilité marginale est décroissante par rapport à x. Comment interpréter cette propriété au sens du modèle économique ?

Exercice 9. *(Problème des moindres carrés.)*
Dans de nombreux problèmes issus de l'économie, la physique, la biologie ou de l'intelligence artificielle, on possède un jeu de données expérimentales à partir duquel on cherche à extrapoler une loi de comportement. Typiquement, ce jeu de données se présente sous la forme de couples $(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ et l'on cherche une relation de la forme $b = R(a)$ reliant ces couples. C'est-à-dire que l'on veut

(P) $$\text{trouver } R : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \text{ telle que } (\forall i \in \{1, \cdots, n\}) \quad R(a_i) = b_i.$$

(1) L'hypothèse la plus simple est de rechercher une relation linéaire, c'est-à-dire supposer que R est linéaire: $R(a) = \langle x, a \rangle$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer dans ce cas que le problème (P) est équivalent à

$$\text{trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } Ax = b,$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ sont à préciser.
(2) Malheureusement, un système linéaire $Ax = b$ n'admet pas toujours de solution. C'est typiquement le cas lorsque les (a_i, b_i) sont issus de mesures expérimentales, entachées d'erreurs de mesures. On cherche alors généralement à résoudre ce problème au sens des *moindres carrés*. Ceci veut dire qu'on cherche à résoudre

(MC) $$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} (\langle a_i, x \rangle - b_i)^2.$$

Montrer que ce problème est équivalent à minimiser la fonction quadratique $\|Ax - b\|^2$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ sont à préciser.
(3) Montrer que $x \in \mathbb{R}^p$ est une solution du problème de moindre carrés (MC) si et seulement si $A^\top Ax = A^\top b$.
(4) Donner une condition suffisante pour que (MC) admette une solution.