université PARIS DIDEROT PARIS 7

L3 MIASHS - OPTIMISATION - 2018-2019

TD1 : RAPPELS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1. *(Quelques exemples autour de la différentiabilité.)*

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(0, x)$. f est elle dérivable en $x = 0$?
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\max(0, x))^2$. f est-elle dérivable en $x = 0$? Est-elle deux fois dérivable en $x = 0$?
(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 \cos x$. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Est-ce que le point $(0, 0)$ est un point critique ? Est-ce un minimum/maximum local ?
(4) On note $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle$. Calculer $Df(x)$ et $\nabla f(x)$.
(5) Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1/2)\|x\|^2$. Montrer que f est différentiable et calculer son gradient en tout point.
(6) Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application affine : $F(x) = Ax + b$ où A est une matrice de $\mathbb{R}^{p\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Montrer que F est differentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2. *(Calculs de dérivées pour une composition de fonctions.)*
Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad f(x) := g(Ax + b).$$

(1) Calculer $Df(x)$ et $\nabla f(x)$, en fonction de A, b, x et g, en utilisant la règle de différentiation de la composition de deux fonctions.
(2) Calculer la différentielle seconde $D^2 f(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ en fonction de A, b, x et g. Pour cela, on calculera le développement limité de $h \mapsto f(x + h)$ pour h au voisinage de 0, à l'ordre 2.
(3) En déduire le gradient et la matrice Hessienne de la fonction $f(x) = (1/2)\|Ax - b\|^2$ en tout point.

Exercice 3. *(Exemple fondamental : fonctionnelle quadratique.)*
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^n$. Calculer sa différentielle $Df(x)$, son gradient $\nabla f(x)$, et sa matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$.
(2) Rappeler l'énoncé du théorème spectral pour les matrices symétriques.
(3) Soient $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de A. Montrer que

$$\lambda_{\min} = \min_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = \max_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Indication : diagonaliser A et effectuer le changement de base correspondant.

(4) On suppose que A est symétrique définie positive.[1] Montrer que $\lambda_{\min} > 0$ et en déduire $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4. *(Dérivée de la norme euclidienne.)*
Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longmapsto \|x\|$ (norme euclidienne) est différentiable, et que

$$\forall x \neq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad Df(x)(h) = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}.$$

Exercice 5. *(Points critiques, extrema locaux et globaux.)*
Pour les fonctions suivantes, trouver leurs points critiques et dire si ce sont des extrema locaux (ou globaux).
1. $f(x,y) = x^3 + y^4$.
2. $f(x) = (1-x^2)^2$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy^2$.
4. $f(x) = \ln(1+\cos x)$.

[1] A est dite positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$. A est dite définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 \Rightarrow \langle Ax, x\rangle > 0$.