TP 2 : Normes matricielles, conditionnement

1) Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ générée aléatoirement, calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_F$, et comparer ces normes à $\max_{i,j} |a_{i,j}|$.

Pour construire une matrice au hasard, on pourra se servir de la commande `rand(n,n)` qui renvoie une matrice dont les entrées suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$ (ou encore `rand(n,n,'normal')`, pour des entrées suivant la loi normale centrée réduite).

Que constate-t-on ?

2) Un exemple de matrice mal conditionnée : on choisit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier, à l'aide de `Scilab`, que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Résoudre, au moyen d'une fonction de `Scilab` le système linéaire

$$Ax = b, \text{ où } b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

c) Résoudre ce sytème avec un second membre légèrement perturbé $\tilde{b}$ (en prenant par exemple $\tilde{b} = b + \epsilon$, avec ϵ un "petit" vecteur).
Afficher alors les erreurs relatives sur les données $\frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$ et sur le résultat : $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$.

d) On pourra reprendre la question c) avec une matrice $\tilde{A}$ qui correspond à la matrice A légèrement perturbée.

e) Vérifier les inégalités démontrées en cours [1]

1. On montre dans le cas de $Ax = b$ et $A\widehat{x} = \widehat{b}$ que

$$\frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|} \leq Cond(A)\frac{\|b - \widehat{b}\|}{\|b\|}.$$

Dans le cas de $Ax = b$ et $\widehat{A}\widehat{x} = b$, on montre

$$\frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|\widehat{x}\|} \leq Cond(A)\frac{\|A - \widehat{A}\|}{\|A\|}.$$

3) Pour tout entier naturel n, on définit la matrice de Hilbert H_n d'ordre n, dont le coefficient sur la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est $1/(i+j-1)$:

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

a) Écrire une fonction permettant de construire H_n.
b) Calculer les conditionnements $Cond_2(H_n)$ en norme $\|\cdot\|_2$ des $p = 12$ premières matrices de Hilbert et les ranger dans un vecteur. [2]
c) Tracer sur un graphique le logarithme de ces conditionnements en fonction de n et comparer [3] avec la fonction $3.5n$.

Commande graphique : `plot(vect-abscisse,[vect-ordonnee-1,vect-ordonnee-2]);`

4) Soit A une matrice quelconque dans $M_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer le rayon spectral $\rho(A)$ de cette matrice [4]. On pourra utiliser les commandes `abs` et `spec`. Que renvoie `norm(A)` ? Appeler `help norm` pour comprendre la différence avec ces deux quantités.
b) Écrire une fonction permettant de calculer la quantité $\|A^k\|_2^{1/k}$ étant donné une matrice A et un entier naturel k.
c) Calculer ainsi $\|A^k\|^{1/k}$ pour des valeurs de k de plus en plus grandes (par exemple, $k = 1, 2, 3, ..., 15$; puis $k = 10, 20, ..., 150$) et comparer avec le rayon spectral $\rho(A)$.
d) Reprendre les questions b) et c) pour d'autres normes (par exemple $\|\cdot\|_p$, où $p = 1$, $p = \infty$).

2. On rappelle que le conditionnement d'une matrice inversible A pour une norme donnée $\|\cdot\|$ est défini par $Cond(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|$. En `Scilab`, on pourra utiliser la commande `cond` pour obtenir le conditionnement en norme 2.

3. On peut montrer que le conditionnement de H_n est de l'ordre de $e^{3.5n}$ lorsque n est grand.

4. On rappelle que le rayon spectral est le maximum du module des valeurs propres complexes.