TD 6 : Méthodes itératives

Exercice 1. Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre d où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ si $j \geq i$). Pour résoudre le système $Ax = b$ (où $b \in \mathbb{C}^d$ est un vecteur donné), on choisit $x_0 \in \mathbb{C}^d$ et on propose la méthode itérative définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$(I - E)\, x_{2k+1} = E^*\, x_{2k} + b,$$
$$(I - E^*)\, x_{2k+2} = E\, x_{2k+1} + b.$$

1. Déterminer B et c pour que l'on ait

$$x_{2k+2} = B\, x_{2k} + c.$$

Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ où $M = (I - E)(I - E^*)$ et $N = EE^*$.

2. Montrer que $M^* + N$ est herminitienne définie positive. En déduire une condition suffisante pour la convergence de la méthode.

Exercice 2.

1. Soit H une matrice hermitienne définie positive et $r > 0$. Montrer que la matrice $(rI + H)$ est inversible, que $(rI - H)$ et $(rI + H)^{-1}$ commutent et que

$$\|(rI - H)(rI + H)^{-1}\|_2 < 1.$$

2. Soit H et K des matrices hermitiennes définies positives et $r > 0$. Montrer que

$$\|(rI - H)(rI + H)^{-1}(rI - K)(rI + K)^{-1}\|_2 < 1,$$

puis que

$$\rho\left((rI + K)^{-1}(rI - H)(rI + H)^{-1}(rI - K)\right) < 1.$$

On considère le schéma itératif suivant

$$(H + rI)y_k = (rI - K)x_k + b,$$
$$(K + rI)x_{k+1} = (rI - H)y_k + b.$$

3. Exprimer, pour $k \geq 0$, x_{k+1} sous la forme

$$x_{k+1} = Bx_k + c$$

pour un vecteur c et une matrice B à préciser (en fonction de H, K, r, b).

4. Montrer que le schéma itératif converge. Autrement dit les suites x_k et y_k convergent quelle que soit la condition initiale x_0.

5. Montrer que leurs limites x et y satisfont

$$(H + rI)y = (rI - K)x + b,$$
$$(K + rI)x = (rI - H)y + b.$$

Puis établir que

$$x = y,$$
$$(H + K)x = b.$$

Exercice 3. On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent-elles ?

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive à condition que $a \in]-1/2, 1[$.

2. Écrire la matrice de l'itération de la méthode de Jacobi associée à A. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

3. Montrer que pour les valeurs de a calculées à la question précédente, la méthode de Gauss-Seidel converge également.

Exercice 5. Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ on propose le schéma itératif suivant

$$u_{k+1} = M_k^{-1} N_k u_k + M_k^{-1} b,$$

où (M_k) et (N_k) sont des suites de matrices telles que pour tout $k \geq 0$,

$$A = M_k - N_k \qquad \text{et} \qquad M_k \text{ est inversible.}$$

1. Exprimer u_k en fonction des matrices M_j, N_j, de b et de u_0.

2. Montrer que la condition

$$\forall k, \qquad \rho(M_k^{-1} N_k) < 1$$

est insuffisante pour assurer la convergence du schéma itératif.

3. Montrer que s'il existe $\delta > 0$ et une norme subordonnée $\|\cdot\|$ tels que pour tout k

$$\|M_k^{-1} N_k\| \leq 1 - \delta$$

alors le schéma itératif converge.

4. Montrer que la condition : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout k

$$\rho(M_k^{-1} N_k) \leq 1 - \delta$$

est insuffisante pour assurer la convergence du schéma itératif. On pourra considérer des matrices $B_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dorénavant on suppose que les matrices M_k sont de la forme

$$M_k = \frac{1}{\mu_k} M$$

pour une matrice M inversible fixée, et μ_k des réels non nuls.

5. Montrer que

$$Au_k - b = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (I - \mu_j A M^{-1}) \right] (Au_0 - b).$$

6. On suppose que $\mathrm{Sp}(AM^{-1}) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\} \subset]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un choix de nombres $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ (fonctions de λ_j) tel que

$$\rho\left(\prod_{j=0}^{k-1}(I - \mu_j AM^{-1})\right) = 0.$$

Vérifier que cette circonstance correspond à une méthode directe de résolution du système linéaire $Ax = b$

7. On suppose que la matrice AM^{-1} est hermitienne et que ses valeurs propres sont encadrées par deux réels α, β connus :

$$\mathrm{Sp}(AM^{-1}) \subset [\alpha, \beta].$$

À quelle condition sur α et β peut-on trouver une suite μ_j assurant la convergence du schéma itératif.

8. Même question si on suppose que la matrice AM^{-1} est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{Sp}(AM^{-1}) \subset [\alpha, \beta]$.