TD 5 : Orthogonalité, normes matricielles

Exercice 1. Trouver une réduction de Schur des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 54 & 15 & -3 \\ 0 & 50 & 0 \\ -28 & 20 & 71 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $I + \alpha A$ est inversible.
4. Montrer que les matrices $(I - A)^{-1}$ et $(I + A)$ commutent et que $(I - A)^{-1}(I + A)$ est orthogonale.

Exercice 3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = A^T A$ est symétrique et positive. À quelle condition B est-elle définie positive ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $||A||_p \geq \max_{i,j} |A_{ij}|$ $\forall p \geq 1$. Est-ce encore vrai pour la norme de Frobenius ?

Exercice 5. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire.

1. Montrer que $||Qx||_2 = ||x||_2$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$.
2. Montrer que $||QA||_2 = ||AQ||_2 = ||A||_2$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est normale si et seulement si

$$||Ax||_2 = ||A^* x||_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Exercice 7. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq q$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

et que

$$\lim_{p \to q, 1 \leq p} ||x||_p = ||x||_q.$$

Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} ||A||_p = ||A||_\infty$$

et que

$$\lim_{p \to q, 1 \leq p} ||A||_p = ||A||_q.$$

Exercice 8. Soit $||\cdot||$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||A|| < 1$. Montrer que $A - I$ est inversible et que

$$||(A-I)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$D_i = B\left(A_{ii}, \sum_{j \neq i} |A_{ij}|\right) \quad :$$

il s'agit du disque de $\mathbb{C}$ de centre A_{ii} et de rayon $\sum_{j \neq i} |A_{ij}|$, qui est appelé *disque de Gerschgörin.* Montrer que toute valeur propre de A appartient à l'union des disques de Gerschgörin, appelée *domaine de Gerschgörin.*
Indication. On pourra pour cela procéder comme suit. Soit λ une valeur propre de A associée à un vecteur propre v. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $||v||_\infty = |v_i|$. Montrer que $|A_{ii} - \lambda| \leq \left|\sum_{j \neq i} A_{ij} \frac{v_j}{v_i}\right| \ldots$

Exercice 10. Montrer que l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son rayon spectral n'est pas une norme.

Exercice 11. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que
$$\left|\left|(A+B)^{-1}\right|\right|_2 \leq \frac{1}{\frac{1}{||A^{-1}||_2} + \frac{1}{||B^{-1}||_2}}.$$
2. En déduire que si A et B sont deux matrices symétriques définies positives,
$$\mathrm{cond}_2(A+B) \leq \max\left(\mathrm{cond}_2(A), \mathrm{cond}_2(B)\right).$$

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On note $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ l'ensemble de ses valeurs propres rangées par ordre croissant et $\{w_i\}_{i=1}^n$ une base de vecteurs propres orthonormée.

1. Montrer que
$$\min_{u \in \mathbb{R}^{n*}} \frac{u^T A u}{u^T u} = \lambda_1$$
et que $u^T A u = \lambda_1 u^T u$ si et seulement si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.
2. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. On note V_j l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension j de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\lambda_j = \min_{E \in V_j} \max_{u \in E} \frac{u^T A u}{u^T u} = \max_{F \in V_{j-1}} \min_{u \in F^\perp} \frac{u^T A u}{u^T u}$$
3. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres λ_i et μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ rangées par ordre croissant. Montrer que
$$u^T A u \geq u^T B u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \lambda_i \geq \mu_i \quad \forall i.$$