TD 4 - Réduction de matrices

Exercice 1.
Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable. Est-elle triangularisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.
Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est-elle triangularisable sur $\mathbb{R}$? L'est-elle sur $\mathbb{C}$? Si oui, la triangulariser.

Exercice 3.
Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer ses vecteurs et valeurs propres. Trouver une base dans laquelle l'application linéaire associée à A s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.
Triangulariser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Réduire A sous forme bloc-diagonale.
2) Réduire A sous forme triangulaire.

Exercice 6.
Montrer que les matrices $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définies ci-dessous sont semblables et trouver la matrice de passage P telle que $A = P^{-1}BP$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra pour cela trouver P telle que $A - I = P^{-1}(B - I)P$ en remarquant que $B - I$ est nilpotente.

Exercice 7.
Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que $\det(Q) = \pm 1$.
2) Montrer que Q est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont de module 1.
3) En déduire que dans le cas où $n = 3$, il existe $p \in \{0, 1\}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que Q est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$