TD 3 : Sous-espaces propres, diagonalisation

Exercice 1. Soit K un corps. Montrer que les seules matrices $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), \quad \text{trace}(MAB) = \text{trace}(MBA)$$

sont les matrices de la forme αI_n, $\alpha \in K$.

Exercice 2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que

$$M + \text{trace}(M)A = B.$$

Exercice 3. Montrer par récurrence que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale principale nulle.
Indications. Considérer d'abord le cas $M = \lambda\,\mathrm{I}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Si M n'est pas de cette forme, introduire un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $\{u, Mu\}$ forment une famille libre (on pourra admettre l'existence d'un tel u), que l'on complètera en une base de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 4. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$A_{i,j} = \delta_{j,i+n}, \quad A_{n+i,j} = -\delta_{j,i}, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le 2n.$$

Calculer A^2. En déduire que A est diagonalisable et trouver les espaces propres de A.

Exercice 5. Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_{i,j} = \delta_{i+j,n+1}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 6. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que a) $M^2 = 0$. b) $M^2 = M$. c) $M^2 = I_3$.

Exercice 7. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels, avec $\alpha_n \neq 0$. Diagonaliser la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Indications. Montrer que 0 est une valeur propre en calculant le noyau de A ; puis raisonner sur la trace de A et la trace de A^2 pour déterminer les autres valeurs propres.

Exercice 8. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telle que $(M^2 + M + I_6)(M - 2I_6)^2 = 0$ et $(M^2 + M + I_6)(M - 2I_6) \neq 0$ et $(M - 2I_6)^2 \neq 0$.

Exercice 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
Indications. Montrer d'abord le résultat pour A, B inversibles, puis raisonner par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
1) Vérifier que si P est le polynôme caractéristique de A, $P(A) = 0$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\big(x, Ax, A^2x, \cdots, A^{n-1}x\big)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.