TD 2 - Rang, déterminant

Exercice 1.
Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ de rangs respectifs r et s. Comparer à r et s les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad (A\ B)\,, \qquad A+B.$$

Exercice 2.
Soit $\epsilon > 0$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(A)$. Cette matrice est-elle inversible ?

b) Étant donné $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système d'équations $Ax = b$.

c) Supposons que $\varepsilon = 10^{-2}$. Quelle est la solution du système d'équations lorsque $b = (1, 2)$? Et lorsque $b = (0.9, 2.1)$? Comparer les solutions.

Exercice 3. Soient u, v, w trois fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et deux fois dérivables, et soit

$$\phi(x) := \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{pmatrix}.$$

On supposera dans cet exercice que $\phi(b) = 0$.

a) Calculer la dérivée de ϕ sur $[a, b]$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\det \begin{pmatrix} u'(c) & v'(c) & w'(c) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

c) Montrer qu'il existe un réel $d \in]a, b[$ tel que

$$\det \begin{pmatrix} u''(d) & v''(d) & w''(d) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice 4.
a) Montrer que toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

est inversible.
b) Montrer que toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall j = 1, \ldots, n, \quad |a_{j,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$$

est inversible.

Exercice 5. Déterminant de Cauchy.
Soient n un entier strictement positif et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels tels que $\alpha_i + \beta_j \neq 0$ pour tout couple d'indice (i, j). On cherche à calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \end{pmatrix}.$$

a) On note $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ le déterminant de A, et on introduit la fonction réelle $D(X) := D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X, \beta_1, \ldots, \beta_n)$. En développant le déterminant par rapport à une ligne appropriée, montrer que $D(X) = \frac{P(X)}{(X+\beta_1)\ldots(X+\beta_n)}$, où P est un polynôme de degré au plus $n-1$.

b) Calculer $D(\alpha_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. En déduire de la question précédente qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$D(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (X - \alpha_i) \prod_{i=1}^{n} (X + \beta_i)^{-1}.$$

c) En développant le déterminant par rapport à une ligne appropriée, montrer que $(X + \beta_n)D(X) = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ lorsque $X = -\beta_n$.

d) Déduire des deux questions précédentes une expression pour λ. Puis, exprimer $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ en fonction de $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$.

e) Prouver que

$$\det(A) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (\alpha_i + \beta_j)}.$$

Exercice 6.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui se décompose par blocs en

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11} est carrée et inversible.
Montrer que :

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

Indication : utiliser l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

où I_1 est l'identité de même dimension que A_1 et I_2 est aussi une matrice identité.