TD 1 : Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soient K un corps et E et F deux K-ev de dimension finie. Soit V un sev de E. On considère l'ensemble $\mathcal{L}_V(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F); V \subset \mathrm{Ker}(u)\}$. Montrer que $\mathcal{L}_V(E,F)$ est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Exercice 2. Soit E l'espace des fonctions 2π-périodiques et indéfiniment dérivables. Soit u l'endomorphisme de E qui à f associe f''. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u une application linéaire de E dans E. Montrer que l'ensemble des applications linéaires v de E dans E telles que $v \circ u = u \circ v = 0$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dim(\mathrm{Ker}(u))^2$. On pourra écrire la matrice de v dans des bases bien choisies.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans E. Montrer les équivalences :

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

$$f^2(E) = f(E) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E.$$

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \Leftrightarrow \exists F, G /\ F \oplus G = E, G \subset \mathrm{Ker}(f), f|_F \text{ est un automorphisme de } F.$$

Exercice 5. On définit la matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculer l'inverse de $I_n - N$.

Exercice 6. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Exercice 7. Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 8. On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels, homogène, à 3 équations et 5 inconnues. Quelle peut être la dimension de l'espace des solutions ? Justifier.

Exercice 9. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = 0 \\ \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = 0 \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = 0 \end{array}\right.$$

en fonction du rang r de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la dimension de E.

Exercice 11. a) Prouver que $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 3, 5)$ et $u_3 = (5, 4, 6)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de $u = (7, 4, 7)$ dans cette base.
b) On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \longmapsto (x', y', z', t') \end{array}$$

où $x' = x + 2y + 7z + 4t$, $y' = x - y + z + t$, $z' = -x + y - z - t$, et $t' = x + 3z + 2t$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
c) Pour chacune des matrices R et S suivantes, calculer son inverse ou montrer qu'elle n'est pas inversible :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

une matrice vérifiant :
$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ (matrice à diagonale strictement dominante).
Montrer que A est inversible.

Exercice 13. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_2) &= e_2 + 5e_3, \\ f(e_3) &= 2e_3. \end{aligned}$$

Montrer que f est inversible et calculer $f^{-1}(e_1)$, $f^{-1}(e_2)$ et $f^{-1}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.