THÉORIE DE L'INFORMATION

Séries de Fourier

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

EXERCICE 1

Soit f une fonction 2π-périodique qui vaut -1 sur $]-\pi;0[$ et 1 sur $]0;\pi[$.

1 Calculer ses coefficients de Fourier.

2 Appliquer la formule de Fourier en 0 ; en $\pi/2$.

3 Appliquer la formule de Parseval.

EXERCICE 2

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = \pi - |t|$ pour $t \in [-\pi;\pi]$.

1 Calculer ses coefficients de Fourier.

2 Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

EXERCICE 3

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = t(\pi - |t|)$ pour $t \in [-\pi;\pi]$.

1 Calculer ses coefficients de Fourier.

2 Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

EXERCICE 4

Soit p un nombre réel. Soit f une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(px)$ pour $x \in]-\pi;\pi[$.

1 Calculer ses coefficients de Fourier.

2 Démontrer la formule, pour $p \notin \mathbf{Z}$,

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi p) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{p^2 - n^2}.$$

3 Démontrer la formule

$$\sin(\pi p) = \pi p \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right).$$

EXERCICE 5

Soit f, g des fonctions de période T, continues par morceaux. On pose

$$f * g(x) = \int_0^{\mathrm{T}} f(t) g(x-t)\, dt.$$

1 Démontrer que $f * g$ est périodique de période T ; justifier qu'elle est continue.

2 Démontrer que les coefficients de Fourier de $f * g$ vérifient

$$c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

EXERCICE 6

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$. Soit g sa transformée de Fourier.

1 À l'aide de la formule $f'(x) = -x f(x)$, démontrer que $g'(\omega) = -\omega g(\omega)$. En déduire qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $g = cf$.

2 Démontrer que $c^2 = 2\pi$, puis que $c = \sqrt{2\pi}$. Prouver aussi que $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$.

EXERCICE 7

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose qu'il existe C tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait $\left|f(x)\right|, \left|f'(x)\right|, \left|f''(x)\right| \leqslant \mathrm{C}(1+|x|^2)$.

1 Soit τ un nombre réel > 0. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} f(x + n\tau)$. Démontrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et de période τ.

2 Calculer les coefficients de Fourier de F en fonction de la transformée de Fourier de f.

3 Démontrer la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(2\pi n/\tau).$$

EXERCICE 8

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, on pose

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

1 Calculer la dérivée de S_n. En déduire les variations de S_n.

2 Démontrer que les maxima relatifs de S_n sont les $m_k = \mathrm{S}_n((2k+1)\pi/(n+1))$, pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n/2$. Démontrer que $m_0 \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_{\lceil n/2 \rceil}$.

3 Démontrer que $\sup(\mathrm{S}_n) \to \int_0^\pi \sin(t)/t\, dt$.

4 Démontrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\mathrm{S}_n(x) \to (\pi - x)/2$. Comparer $\sup(\mathrm{S})$ et $\lim\limits_{n} \sup(\mathrm{S}_n)$; interpréter ? (*Phénomène de Gibbs*)