

THÉORIE DE L'INFORMATION

Entropie et codage

Antoine CHAMBERT-LOIR / Guillaume GARRIGOS

**EXERCICE 1. — Second principe de la thermodynamique**

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  des chaînes de Markov homogènes à valeurs dans le même ensemble fini  $A$ , et possédant la même matrice de probabilités de transition  $P$ . On note  $p_n$  et  $q_n$  les lois respectives de  $X_n$  et  $Y_n$ .

- 1 Montrer que la suite  $(D(p_n | q_n))_{n \geq 0}$  est décroissante.
- 2 Décrire cette suite lorsque ces chaînes de Markov sont irréductibles et apériodiques et  $(Y_n)$  est stationnaire.
- 3 Que se passe-t-il si, de plus, la loi stationnaire de la chaîne  $(Y_n)$  est la loi uniforme sur  $A$ ?

**EXERCICE 2**

On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans un ensemble  $A$  dont la loi appartient à une famille de lois  $(p_t)$  indexée par un paramètre  $t$ , lui-aussi aléatoire, appartenant à un ensemble  $T$ . On voudrait, à partir de  $X$ , retrouver ce paramètre  $t$ .

- 1 Soit  $f$  une fonction sur  $A$ . Démontrer l'inégalité  $I(t; f(X)) \leq I(t; X)$ .  
On dit que  $f$  est une statistique suffisante pour  $t$  si l'on a égalité.
- 2 On suppose que  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , où les  $X_k$  sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $t = \mathbf{P}(X_k = 1)$ . On suppose que  $f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$ . Démontrer que  $f$  est une statistique suffisante pour  $t$ .

**EXERCICE 3**

On considère un code binaire sur un ensemble à deux éléments tel que les deux mots codés sont 0 et 01.

- 1 S'agit-il d'un code préfixe?
- 2 Démontrer que ce code est uniquement décodable.

**EXERCICE 4**

Soit  $(X_n)$  un processus stationnaire prenant ses valeurs dans un ensemble  $A$  fini. Pour tout entier  $n$ , on considère la variable aléatoire  $Y_n = (X_1, \dots, X_n)$  à valeurs dans  $A^n$ .

- 1 Lorsque de plus les  $X_n$  sont indépendantes, rappeler quelle est la loi de  $Y_n$  et son entropie.
- 2 Soit  $C_n$  un code sur  $A^n$ , à valeurs dans un alphabet de cardinal  $D$ , qui est optimal relativement à la loi de  $Y_n$ . On pose

$$L_n = \mathbf{E}(\ell(C_n(Y))) / n.$$

En appliquant le théorème de Shannon à la variable  $Y_n$ , démontrer que  $L_n$  converge vers le taux d'entropie du processus  $(X_n)$ .

### EXERCICE 5

On considère l'alphabet  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  avec les probabilités respectives :

a	b	c	d	e	f	g
0,49	0,26	0,12	0,04	0,04	0,03	0,02

- 1 Calculer l'entropie d'une variable aléatoire ayant une telle loi.
- 2 Construire un code par la méthode de Shannon (c'est-à-dire qu'un symbole  $x \in A$  est codé par un mot de longueur  $\lceil -\log(p(x)) \rceil$ , où  $p(x)$  est sa probabilité). Quelle est la longueur moyenne d'un tel code?
- 3 Construire, par la méthode de Huffman, un code binaire optimal. Quelle est sa longueur moyenne?
- 4 Coder le mot *bagage*.
- 5 Décoder le message 111110111101111011101.

### EXERCICE 6

On considère une variable aléatoire  $X$  sur un alphabet fini  $A$ , de loi de probabilité  $p$ . Pour calculer un code binaire optimal relativement à cette loi, on doit connaître la loi  $p$ . Supposons qu'on n'en connaisse qu'une approximation  $q$ , qu'on utilise comme code  $C$  un code binaire  $C$  construit à la Shannon, relativement à la loi  $q$ , c'est-à-dire que  $\ell(C(a)) = \lceil -\log(q(a)) \rceil$ .

- 1 On suppose que  $q$  est *dyadique*, c'est-à-dire que pour tout  $a$ ,  $q(a)$  est de la forme  $1/2^n$ , pour un certain entier  $n$ . Quelle est la longueur moyenne  $\mathbf{E}(\ell(C(X)))$  d'un mot de code? Démontrer que  $C$  est un code optimal relativement à la loi  $q$ .
- 2 Dans le cas général, démontrer l'encadrement de cette longueur moyenne :

$$H(X) + D(p | q) \leq \mathbf{E}(\ell(C(X))) < H(X) + D(p | q) + 1.$$